❶ Déterminer tous les complexes non nuls z tels que: $\frac{z^4}{\bar{z}^2} \in \mathbb{R}$.

❷ On notera $P^{\star}$, le plan complexe, privé du point O.

Soit f, l'application de $P^{\star}$, dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{\bar{z}}$.

1/ Exprimer les coordonnées x' et y' de M en fonction des coordonnées x et y de M.

2/ L'application f est elle une injection de $P^{\star}$ dans lui même?

3/ Même question pour une surjection.

4/ Montrer que f est involutive.

5/ Déterminer l'image par f :

de l'axe des abscisses privé du point O.
de l'axe des ordonnées privé du point O.
du cercle trigonométrique.
du cercle de centre O et de rayon 2.
de la droite d'équation x=1.

❸ On considère les applications f et g ainsi définies:

$f : \mathbb{N} \to Z$

$$n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2}, \text{ si n est pair} \\ \frac{-(n+1)}{2}, \text{ si n est impair} \end{cases}$$

nb: Z est l'ensemble des entiers rationnels

:Z={......,-3,-2,-1,0,1,2,3,.......}

$g : Z \to \mathbb{N}$

$$n \mapsto \begin{cases} 2n, \text{ si n est positif} \\ -2n-1, \text{ si n est strictement négatif} \end{cases}$$

Montrer que f est bijective avec $g = f^{-1}$.

❹ On veut calculer l'intégrale $I = \int_0^{\pi} |\sin(nt)| dt$.

1/ Etudier le signe de sin(nt) sur $[0, \pi]$.

On se placera sur les intervalles du type $[k\frac{\pi}{n}, (k+1)\frac{\pi}{n}]$ et l'on distinguera selon que k est pair ou impair.

2/ Calculer $\int_{k\frac{\pi}{n}}^{(k+1)\frac{\pi}{n}} |\sin(nt)| dt$.

Séparer selon que k est pair ou impair.

3/ En utilisant la formule de Chasles en déduire I.

❺ On dispose de deux urnes U_1 et U_2, contenant des boules indiscernables au toucher.

Dans U_1, il y a n blanches et 3 noires; n,entier naturel non nul.

Dans U_2, il y a 2 blanches et 1 noire;

Une épreuve, consiste à tirer au hasard une boule de U_1, puis à la mettre dans U_2, puis à tirer au hasard une boule de U_2, que l'on remettra dans U_1.

1/ Quelle est la probabilité qu'après l'épreuve les urnes U_1 et U_2, retrouvent leur composition initiale.

2/ Un joueur mise 20 euros et effectue une épreuve.

A l'issue d'une épreuve, il compte le nombre de boules blanches dans U_2.

Si U_2 , contient 1 seule blanche, il gagne 2n euros.
S'il y a 2 blanches dans U_2 , il gagne n euros;
S'il y a 3 blanches, il ne reçoit rien.
On note X le gain algébrique du joueur.Cest à dire, ce qu'il gagne, moins ce qu'il mise.

a/ Loi de X avec des explications claires!!!

b/ Espérance de X.

c/ Comment choisir n pour que le jeu soit favorable au joueur? (Espérance positive)